FILAS DE ESPERA

- 1 - FE01

Admita que o processo de chegadas de clientes a uma loja pode ser considerado um Processo de Poisson, com uma taxa de 5 chegadas por minuto.

Determine:

- a probabilidade de decorrer mais de 1/2 minuto entre duas chegadas consecutivas;

- a probabilidade de chegarem à loja, num dado minuto, menos do que 5 clientes.

- a probabilidade de chegarem à loja, num dado minuto, exactamente 10 clientes.

- 2 - FE02

A MegaIO é uma multinacional na área das telecomunicações. O Dr. Santos Martins, Responsável pelos Serviços Técnicos da MegaIO na Lusólia, está apreensivo com o volume de chamadas telefónicas internas que chegam à Central Telefónica (CT).

Depois de analisarem os registos dos instantes de chegada das chamadas internas à CT num dado dia entre as 09:00:00 e as 09:20:00, os responsáveis pelo planeamento da MegaIO concluíram que os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas se podem considerar com distribuição Exponencial, com valor médio igual a 1/2737 (em horas).

O Dr. Santos Martins pretende que se caracterize o número de chamadas telefónicas internas que chegam à CT a cada 10 segundos.

O João Matos, acabado de chegar da Faculdade e em estágio nos Serviços Técnicos da MegaIO na Lusólia, arriscou-se a sugerir que o número de chamadas internas chegadas à CT num dado intervalo de tempo deveriam seguir a distribuição de Poisson. Esta sugestão irritou o Dr. Santos Martins, para quem "Poisson" só quer dizer "peixe" em francês ...

- "E o que é que eu faria com o teu Poisson ?", perguntou rispidamente o Dr. Santos Martins, continuando, "O que eu gostaria é que me dissesses se é provável que num intervalo de 10 segundos - ... sei lá, ou 30 segundos... – que cheguem à CT mais do que 10 chamadas internas ..."

- "Isso não deve ser muito difícil de descobrir...", respondeu o João Matos, puxando o seu portátil e analisando os registos.

*** *** ***

Pretende-se que, relativamente ao período de tempo referido, ajude:

- a caracterizar o processo de chegadas de chamadas telefónicas à CT;
- a caracterizar o número de chamadas telefónicas chegadas à CT em cada 10 segundos;
- a caracterizar o número de chamadas telefónicas chegadas à CT em cada 15 segundos;
- a determinar a probabilidade de chegarem mais do que 10 chamadas telefónicas à CT em cada intervalo de Δ segundos, com Δ entre 10 e 30.

- 3 - FE03

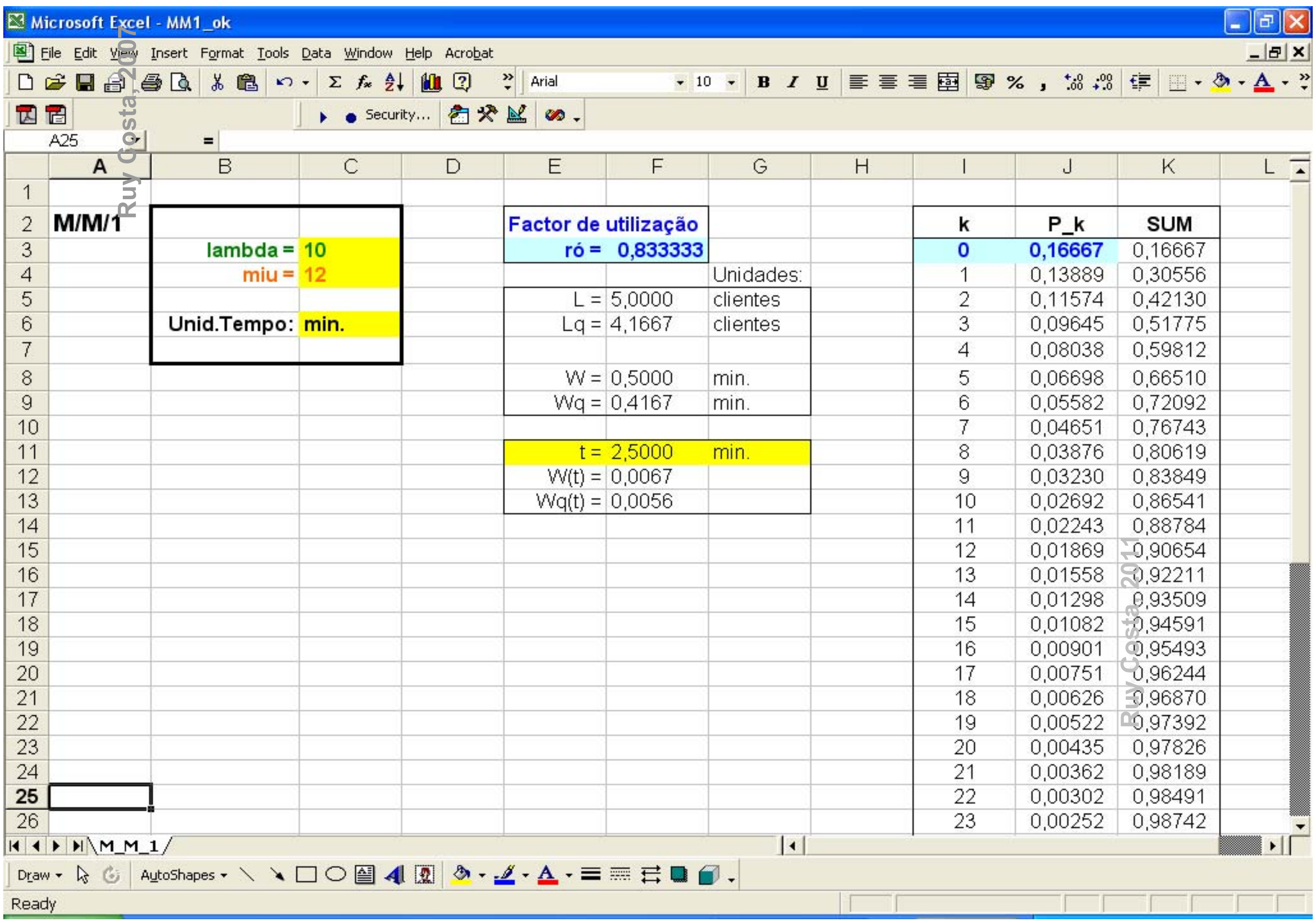
Pretende-se que programe uma Folha de Cálculo para o modelo **M/M/1**, de modo a que o utilizador indique as taxas de chegada , λ, e de serviço, μ, bem como a unidade de tempo.

A Folha de Cálculo deverá permitir calcular ρ, L, L_q, W, W_q , P_0, P_1, ... , P_{40}.

O utilizador poderá ainda indicar t e a Folha de Cálculo deve apresentar P($\mathcal{W}$ > t) e P($\mathcal{W}_q$ > t).

Consulte o Formulário !

Verifique os resultados produzidos pela sua Folha de Cálculo:



k	P_k	SUM
0	0,16667	0,16667
1	0,13889	0,30556
2	0,11574	0,42130
3	0,09645	0,51775
4	0,08038	0,59812
5	0,06698	0,66510
6	0,05582	0,72092
7	0,04651	0,76743
8	0,03876	0,80619
9	0,03230	0,83849
10	0,02692	0,86541
11	0,02243	0,88784
12	0,01869	0,90654
13	0,01558	0,92211
14	0,01298	0,93509
15	0,01082	0,94591
16	0,00901	0,95493
17	0,00751	0,96244
18	0,00626	0,96870
19	0,00522	0,97392
20	0,00435	0,97826
21	0,00362	0,98189
22	0,00302	0,98491
23	0,00252	0,98742

- 4 - FE04

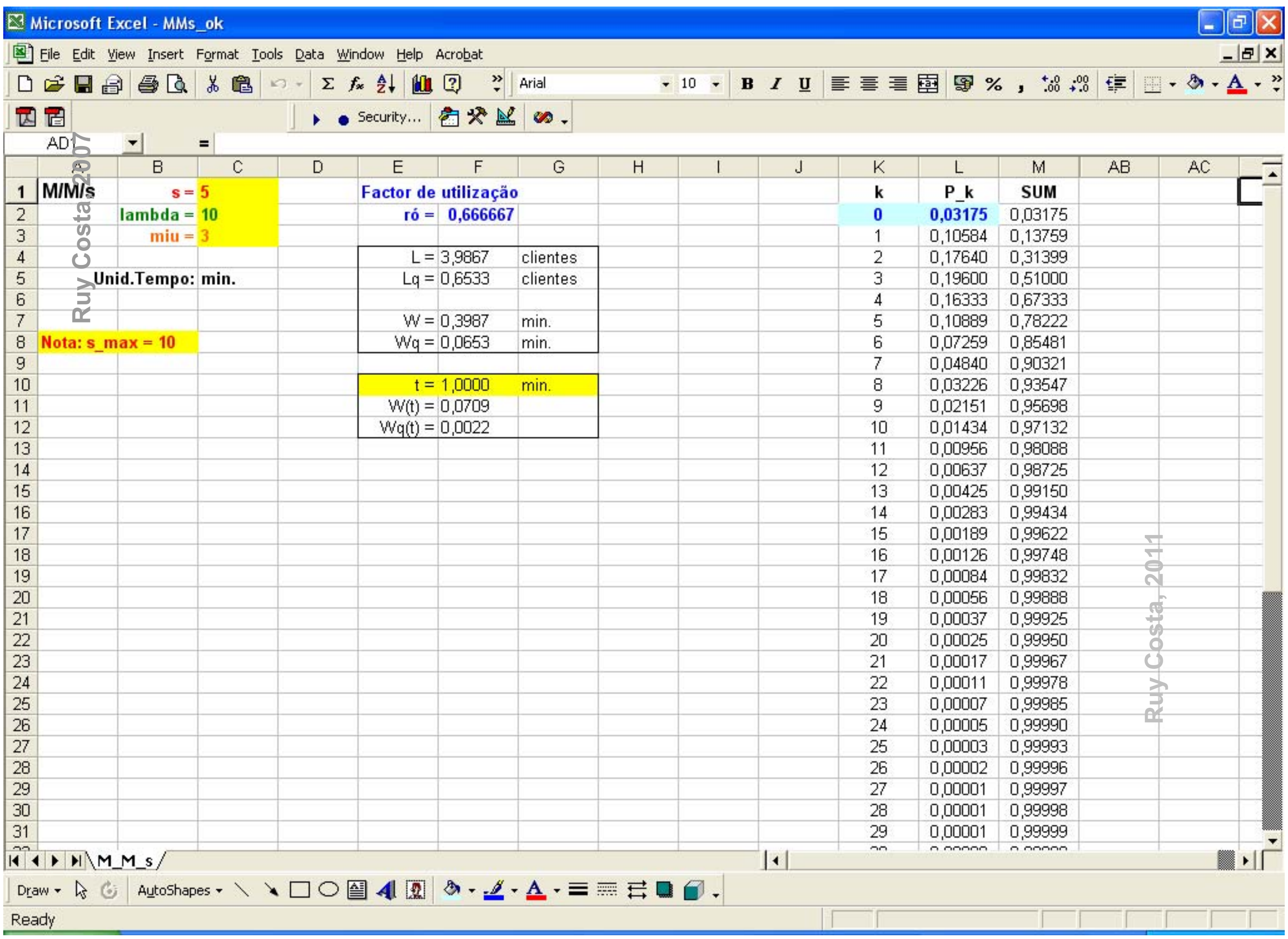
Pretende-se que programe uma Folha de Cálculo para o modelo **M/M/s**, de modo a que o utilizador indique o número de servidores, s (assuma que $s \leq 10$), as taxas de chegada , λ, e de serviço, μ, bem como a unidade de tempo.

A Folha de Cálculo deverá permitir calcular ρ, L, L_q, W, W_q , P_0, P_1, ... , P_{40}.

O utilizador poderá ainda indicar t e a Folha de Cálculo deve apresentar P($\mathcal{W}$ > t) e P($\mathcal{W}_q$ > t).

Consulte o Formulário !

Verifique os resultados produzidos pela sua Folha de Cálculo:



	A	B	C	E	F	G	K	L	M
1	M/M/s	s =	5	Factor de utilização			k	P_k	SUM
2		lambda =	10	ró =	0,666667		0	0,03175	0,03175
3		miu =	3				1	0,10584	0,13759
4				L =	3,9867	clientes	2	0,17640	0,31399
5		Unid.Tempo:	min.	Lq =	0,6533	clientes	3	0,19600	0,51000
6							4	0,16333	0,67333
7				W =	0,3987	min.	5	0,10889	0,78222
8	Nota: s_max = 10			Wq =	0,0653	min.	6	0,07259	0,85481
9							7	0,04840	0,90321
10				t =	1,0000	min.	8	0,03226	0,93547
11				W(t) =	0,0709		9	0,02151	0,95698
12				Wq(t) =	0,0022		10	0,01434	0,97132
13							11	0,00956	0,98088
14							12	0,00637	0,98725
15							13	0,00425	0,99150
16							14	0,00283	0,99434
17							15	0,00189	0,99622
18							16	0,00126	0,99748
19							17	0,00084	0,99832
20							18	0,00056	0,99888
21							19	0,00037	0,99925
22							20	0,00025	0,99950
23							21	0,00017	0,99967
24							22	0,00011	0,99978
25							23	0,00007	0,99985
26							24	0,00005	0,99990
27							25	0,00003	0,99993
28							26	0,00002	0,99996
29							27	0,00001	0,99997
30							28	0,00001	0,99998
31							29	0,00001	0,99999

- 5 - FE05

A “LavAuto” é um posto de lavagem automática de automóveis, com um pequeno parque, que permite que, no máximo, 4 automóveis aguardem pelo início da lavagem.

Como a “LavAuto” se situa numa zona com muito movimento automóvel, se um potencial cliente pretender entrar e se deparar com o parque cheio, desistirá da lavagem e prosseguirá a sua marcha.

Os potenciais clientes chegam à ”LavAuto” segundo um Processo de Poisson, com uma taxa de 10 chegadas por hora, estimando-se que a duração do atendimento de um cliente se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 5 minutos.

Determine:

a) a probabilidade da “LavAuto” estar vazia;
b) a probabilidade da “LavAuto” estar completamente cheia;
c) o número médio de automóveis na “LavAuto”;
d) o tempo médio de espera na fila;
e) a receita perdida, devido ao parque estar cheio, sabendo que o valor médio da receita por lavagem é igual a 4,00 €.

Consulte o Formulário !

- 6 - FE06

Considere a “LavAuto” do exercício anterior.

O gerente da “LavAuto” está a avaliar o interesse da montagem de um segundo posto de lavagem automática de automóveis, ainda que tal implique a redução do pequeno parque, que passaria a permitir a espera de, no máximo, apenas 3 automóveis.

Admita que os dois postos de lavagem são idênticos, com uma duração média de lavagem igual a 5 minutos.

Determine:

f) a probabilidade da “LavAuto” estar vazia;
g) a probabilidade da “LavAuto” estar completamente cheia;
h) o número médio de automóveis na “LavAuto”;
i) o tempo médio de espera na fila;
j) a receita perdida, devido ao parque estar cheio, sabendo que o valor médio da receita por lavagem é igual a 4,00 €.

Consulte o Formulário !

- 7 - FE07

Numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariam, são reparados por dois técnicos de manutenção.

Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial de média 5 horas e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que se pode considerar com distribuição exponencial de média 1 hora.

Sabendo que se estima um prejuízo de 100 € por cada hora de inactividade de uma máquina, e que cada técnico de manutenção se traduz num custo horário de 10 €, seria justificável a contratação de um terceiro técnico de manutenção ? E qual o número de técnicos de manutenção que seria recomendável ?

Consulte o Formulário !

- 8 - FE08

- “Grrrr ... Detesto trabalhar à pressão !”, rosnava o Sr. Silva, dono da tabacaria há mais de 30 anos, “Quando só está um cliente, sempre podemos dar dois dedos de conversa ... ou mesmo três ... Agora, quando estou a atender alguém e me aparece outro que fica à espera e que começa a olhar para mim, a minha tensão aumenta e lá tenho que despachar o cliente ... E, então, se estão muitos à espera, viro robot ... o que já não é adequado à minha idade !”

O Sr. Silva é o único a atender os seus clientes. O Sábado de manhã é sempre mais complicado. A Tabacaria está bem localizada e há 2,5 clientes por minuto a chegar ... O Sr. Silva normalmente despacha 3 clientes por minuto.

Em conversa com o Sr. Silva, elaborámos o Quadro seguinte, que mostra que o aumentar de clientes na sua tabacaria o pressiona e o leva a despachá-los mais rapidamente.

n	μ_n
1	3,000
5	4,862
10	5,986
15	6,760
20	7,369

O Sr. Silva gostaria de saber se não se sentisse pressionado, se os seus clientes iriam esperar muito mais para ser atendidos.

- "Se calhar isto é mesmo mania minha ... Se eu atendesse todos ao mesmo ritmo esperavam um pouquito mais e ninguém se importava ... Ou será que ficavam furiosos ?", interrogava-se o pobre Sr. Silva, suspirando.

* * *

a) Determine P0, L e W, no contexto "sem pressão".

b) Recorrendo aos dados apresentados no Quadro acima, estime a constante de pressão **c**, que melhor se adapta a esses dados.

c) Determine P0, L e W, no contexto "com pressão" e compare os resultados com os obtidos na alínea a).

Formulário:

$$\mu_n = n^c \cdot \mu_1 , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$C_n = \frac{(\lambda / \mu_1)^n}{(n!)^c} , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n P_0 , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots .$$

$$P_0 = 1 \;/\; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

- 9 - FE09

- "Esperar na Tabacaria do Sr. Silva ? Nem pensar !", dizia um dos clientes da Tabacaria do Sr. Silva na conversa com um amigo.

Tal como este cliente, vários outros também não estavam na disposição de grandes esperas na Tabacaria do Sr. Silva ... Na realidade, quanto mais clientes estavam na Tabacaria, menor a vontade de os potenciais clientes entrarem para aguardar o atendimento ...

O Sr. Silva é o único a atender os seus clientes. O Sábado de manhã é sempre mais complicado. A Tabacaria está bem localizada e há 2,5 potenciais clientes por minuto a chegar... O Sr. Silva normalmente despacha 3 clientes por minuto.

Depois de se observar o comportamento dos potenciais clientes, foi possível quantificar a efectiva diminuição de entradas na Tabacaria, em função do número de clientes que estava no seu interior:

n	λ_n
0	2,5
1	1,6
2	1,3
3	1
4	0,9
5	0,8
10	0,6
15	0,5
20	0,4

Qual o impacto da pressão sentida pelos potenciais clientes do Sr. Silva, resultante dos clientes no interior da tabacaria ?

* * *

d) Determine P0, L e W, no contexto "sem pressão".

e) Recorrendo aos dados apresentados no Quadro acima, estime a constante de pressão **b**, que melhor se adapta a esses dados.

f) Determine P0, L e W, no contexto "com pressão" e compare os resultados com os obtidos na alínea a).

Formulário a seguir !

Formulário:

$$\lambda_n = (n+1)^{-b} \,.\, \lambda_0 \,, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0/\mu)^n}{(n!)^b} \,, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n P_0 \,, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \,.$$

$$P_0 = 1 \;/\; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \,.\, P_n$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \,.\, P_n$$

- 10 - FE10

Na sua Tabacaria, o Sr. Silva é o único a atender os seus clientes. O Sábado de manhã é sempre mais complicado. A Tabacaria está bem localizada e há 2,5 potenciais clientes por minuto a chegar... O Sr. Silva normalmente despacha 3 clientes por minuto.

Depois de se observar o comportamento dos potenciais clientes, foi possível quantificar a efectiva diminuição de entradas na Tabacaria, em função do número de clientes que estava no seu interior:

n	λ_n
0	2,5
1	1,6
2	1,3
3	1
4	0,9
5	0,8
10	0,6
15	0,5
20	0,4

Por outro lado, o Sr. Silva sente-se pressionado pelo número de clientes na sua tabacaria, tendendo a despachá-los mais rapidamente à medida que o seu número aumenta:

n	μ_n
1	3,000
5	4,862
10	5,986
15	6,760
20	7,369

Compare a situação clássica do modelo M/M/1, com a resultante destes dois factores de pressão.

* * *

g) Determine P0, L e W, no contexto “sem pressão”.

h) Determine P0, L e W, no contexto “com dois factores de pressão” e compare os resultados com os obtidos na alínea a).

Formulário:

$$\mu_n = n^c \,.\, \mu_1 \,, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = (n+1)^{-b} \,.\, \lambda_0 \,, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{(n!)^{b+c}} \,, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n \, P_0 \,, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \,.$$

$$P_0 = 1 \;/\; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \,.\, P_n$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \,.\, P_n$$

- 11 - FE11

O “Canto da Tia Alice” é um pequeno café, com apenas uma empregada – a tia Alice em pessoa.

Sabe-se que o processo de chegadas de clientes ao“Canto da Tia Alice” se pode considerar Poissoniano de taxa média igual a 2,0 chegadas por minuto.

A sobrinha Francisca esteve a cronometrar a tia Alice a trabalhar (“Mas porque raio é que aquela miúda não larga o cronómetro e não me vem ajudar aqui atrás do balcão ?”, pensou a tia Alice) chegou à conclusão que a tia atende um cliente em aproximadamente 20 segundos.

O Mário – o sobrinho favorito da tia Alice – ao saber das conclusões da Francisca após um dia de cronometragem exclamou:

- “Mas que **grande** conclusão !!! “Aproximadamente” 20 segundos a atender um cliente !!! Mas a tia Alice é algum robot e demora exactamente 20 segundos com cada cliente ? Ou será que a duração do atendimento de um cliente se pode considerar com distribuição Exponencial de valor médio 20 segundos ?? Ou será que a duração do atendimento, DA, de um cliente se pode considerar decomposta na soma de dois “tempos exponencialmente distribuídos” – o tempo do café e o tempo do bolinho – tais que DA ~ $T_1 + T_2$, com T_1, T_2 v.a. i.i.d. e $T_1 \sim T_2 \sim$ Exponencial com valor médio igual a 10 segundos ???”

“Já sabia que o Mário estava a estudar Matemática e que era um tipo muito esquiisito ... mas, assim tanto ?”, pensou a Francisca suspirando.

Compare os três cenários referidos pelo Mário e determine as correspondentes medidas de desempenho do sistema de atendimento de clientes no “Canto da Tia Alice”, comparando-as.

Depois de se observar o comportamento dos potenciais clientes, foi possível quantificar a efectiva diminuição de entradas na Tabacaria, em função do número de clientes que estava no seu interior:

Formulário:

Fórmula de Pollaczek-Khintchine M/G/1	$L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$
M/D/1	$L_q = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}$
M/ E_k/1	$Lq = \dfrac{1+k}{2k}\,\dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

- 12 - FE12

No Hospital Distrital de Lisbólia, aos Sábados de manhã, os pacientes chegam segundo um processo Poissoniano com taxa média igual a 2,0 pacientes por hora. Em média, um médico consegue tratar 3 pacientes por hora, podendo assumir-se que a duração de um atendimento segue uma distribuição Exponencial.

Cerca de 10 % dos pacientes correspondem a casos críticos; 30 % correspondem a casos graves e 60 % a casos estáveis.

Pretende-se avaliar o interesse de ter um ou dois médicos ao serviço. Para tal, deve comparar os resultados obtidos no contexto “sem prioridades”, com os correspondentes no cenário “com prioridades”.

As prioridades são “absolutas” se a chegada de um paciente crítico implicara interrupção do atendimento de um paciente em estado não crítico, para se dar início ao atendimento do paciente em estado crítico.

Avalie a diferença do desempenho do sistema no cenário de prioridades absolutas e não absolutas.

(Exercício adaptado de Hillier e Lieberman.)

Consulte o Formulário !

- 13 - FE13

O José, aluno finalista do curso de Matemática da Universidade da Lusólia, está a fazer o seu estágio sobre Filas de Espera na Cantina da sua Universidade, estando a analisar, neste momento, um dos locais mais populares da sua Cantina: o “SPG – Só Para Gulosos !”.

O “SPG – Só Para Gulosos !” é um bar onde todos os clientes tomam uma “bica” e comem um bolo, passando ao longo de um comprido balcão de atendimento: primeiro passam na caixa registadora de pré-pagamento, depois levantam o seu café e, seguindo em frente, escolhem o seu bolinho.

“Que interessante !”, pensou o José, “uma empregada para a caixa registadora, duas para servir os cafés e, finalmente, uma nos bolinhos ... Estes tipos parecem-me eficientes, com esta especialização dos empregados ...”.

O José concluiu que, a seguir ao almoço, o processo de chegada dos clientes ao “SPG – Só Para Gulosos !” é Poissoniano, com taxa média igual a 10 clientes por minuto. Concluíu também que as durações de atendimento de um cliente nos três “serviços” se podiam considerar com distribuição Exponencial, com valores médios (em segundos) dados na tabela seguinte:

“Serviço”	Caixa Registadora	Cafés	Bolinhos
Duração Média (seg.)	4,5	9,0	5,0

Quando soube que o José era um “tipo lá da Matemática”, o Gerente do SPG resolveu conversar:

- “Ouve lá, pá, por exemplo, qual a probabilidade de estarem simultaneamente 3 tipos na caixa, outros 3 nos cafés e mais 3 nos bolinhos ? É que o balcão do SPG é comprido, mas não é elástico e eu não quero aqui cenas de pancadaria ... Achas que valia a pena contratar mais alguém ? E para onde ? Mas olha que eu não sou primo da Madre Teresa de Calcutá ! Qual é a probabilidade dos meus escravos estarem todos a descansar ao mesmo tempo ???”

Antes que o José pudesse sequer respirar, o Gerente voltou à carga:

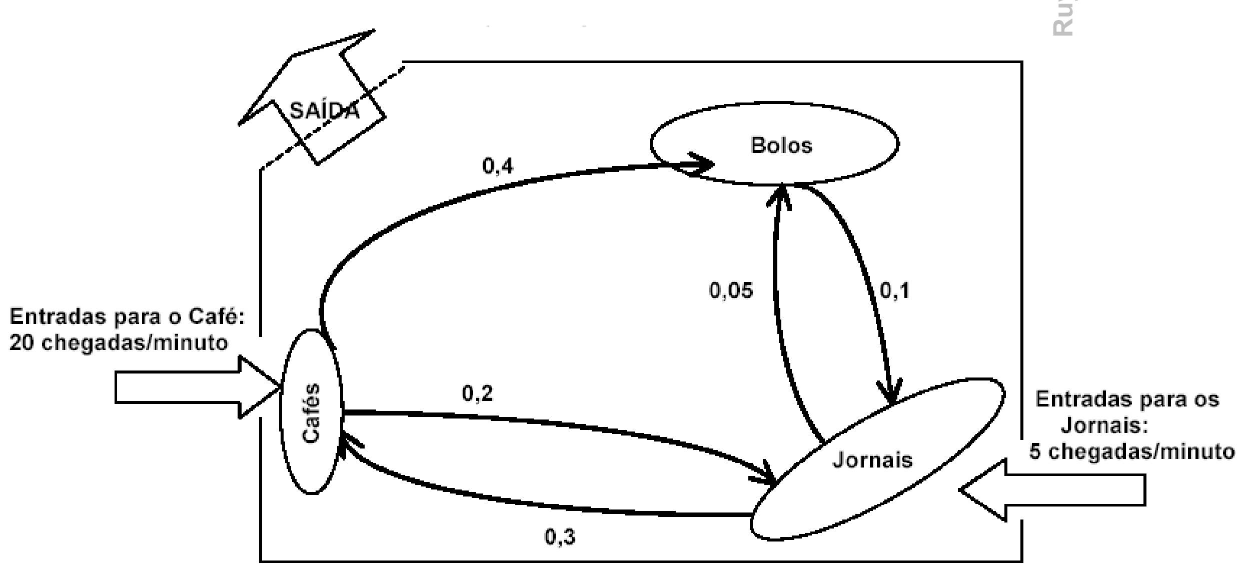
- “Sabes, pá, tive uma outra ideia: utilizava os 4 empregados todos à misturada ... ‘Tás a ver: caixa, cafés e bolos ... Polivalência ... É uma chatice isto ser assim um bocado acanhadito, iam começar às cotoveladas uns aos outros e, de certeza que por cliente acabavam por demorar mais do que os 4,5 + 9,0 + 5,0 segundos que determinaste antes ... Se calhar demoravam uns 20 segundos com cada cliente ... O que é que achas, pá ?” .

* * *

Ajude o José a analisar a situação no “SPG – Só Para Gulosos !”.

- 14 - FE14

O José, aluno finalista do curso de Matemática da Universidade da Lusólia, está a fazer o seu estágio sobre Filas de Espera na Cantina da sua Universidade, estando a agora a analisar o “CBJ – Café, Bolos e Jornais”, um recanto muito popular da sua Cantina. O José concluíu que os processos de chegada dos clientes do exterior são Poissonianos e que a transição entre sectores é feita de acordo com o esquema seguinte:



Assim, e por exemplo, 20 % dos clientes dos “Cafés” dirigem-se posteriormente para a secção “Jornais”.

As durações de atendimento de um cliente nos três “serviços” podem-se considerar com distribuição Exponencial, com valores médios (em segundos) dados na tabela seguinte:

“Serviço”	Cafés	Bolos	Jornais
Duração Média (seg.)	9,0	5,0	10,0

O Gerente do “CBJ – Café, Bolos e Jornais” dispõe de um total de 8 empregados que podem ser afectados a cada uma das três secções e, segundo as suas palavras, “Nem quero sonhar com mais de 30 clientes a serem atendidos ou em espera !!! Isso era um pesadelo !!!”.

O Gerente do CBJ gostaria de ter a sua proposta de afectação e, para essa proposta, gostaria de saber qual a probabilidade de estarem mais de 30 clientes a serem atendidos ou em espera. Gostaria, ainda, de saber, para o sistema de atendimento proposto, qual o número total esperado de clientes no sistema e qual o tempo médio de permanência de um cliente no sistema.

* * *

Ajude o José a analisar a situação no “CBJ – Café, Bolos e Jornais”.

- 15 -

O processo de chegadas de clientes à recém-aberta “Agência de Viagens Mega VIP” pode considerar-se Possoniano com taxa média igual a 5 por hora. Por outro lado, em média, a dona da Agência (e, de momento, a única empregada) pode atender 8 clientes por hora.

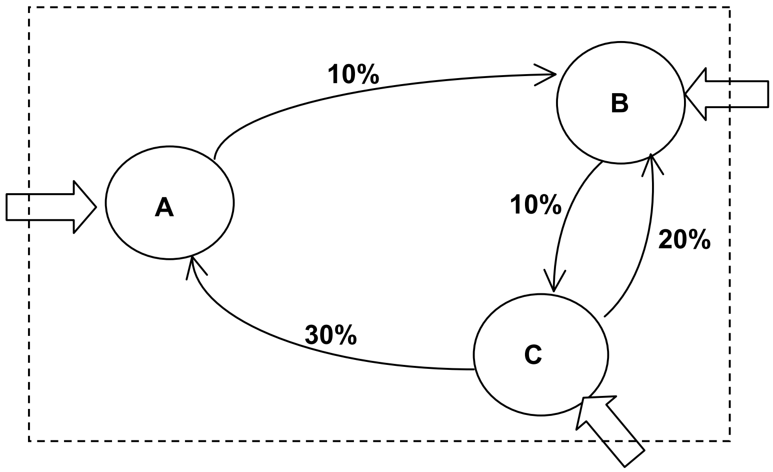
a) Admitindo que a duração do atendimento de cada cliente é rigorosamente igual a 7,5 minutos, determine o tempo médio que um cliente tem de esperar para começar a ser atendido.

b) Admita que o atendimento de cada cliente se pode considerar com duas fases: “conversa inicial” (com duração Exponencial de valor médio igual a 2 minutos) e “concretização” (com duração Exponencial de valor médio igual a 5,5 minutos). Determine o tempo médio que um cliente tem de esperar para começar a ser atendido.

c) A dona da “Agência de Viagens Mega VIP” pensou criar o “Cartão Mega VIP”, que daria prioridade no atendimento, sem no entanto se interromper atendimentos em curso. De acordo com as suas estimativas, 20 % dos clientes aderirão ao “Cartão Mega VIP”. Admitindo que a duração do atendimento de cada cliente se possa considerar com distribuição Exponencial de média igual a 7,5 minutos, determine o tempo médio que um cliente com “Cartão Mega VIP” terá de esperar para começar a ser atendido **e** o tempo médio que um cliente sem “Cartão Mega VIP” terá de esperar para começar a ser atendido.

- 16 -

Considere rede de filas de espera esquematizada abaixo, com processos de chegadas Poissonianos e durações de serviço com distribuição Exponencial:



Nota: As setas largas indicam as entradas do exterior e as setas finas indicam as possibilidades de transição entre sectores (com as

a) Sabendo que λ_A = 10,2669 clientes/h, λ_B = 12,7823 clientes/h e que λ_C = 17,5565 clientes/h, determine as taxas de entrada de clientes para cada secção, directamente do exterior.

b) Sabe-se que μ_A = 6,0000 clientes/h, μ_B = 15,0000 clientes/h e que μ_C = 20,0000 clientes/h e que se dispõe de 5 empregados para distribuir pelos três sectores.

Com base nos valores do quadro seguinte, proponha uma distribuição dos empregados tal que a permanência de um cliente no sistema não ultrapasse a meia hora. Justifique.

Sector		**A**		**B**		**C**	
clientes/h	λ	10,2669		12,7823		17,5565	
clientes/h	μ	6,0000		15,0000		20,0000	
M/M/1 ou M/M/S		**M/M/2**	**M/M/3**	**M/M/1**	**M/M/2**	**M/M/1**	**M/M/2**
	ρ	0,8556	0,5704	0,8522	0,4261	0,8778	0,4389
clientes	**L**	6,3853	2,1329	5,7639	1,0412	7,1849	1,0873
clientes	**Lq**	4,6741	0,4217	4,9117	0,1890	6,3070	0,2095
h	**W**	0,6219	0,2077	0,4509	0,0815	0,4092	0,0619
h	**Wq**	0,4553	0,0411	0,3843	0,0148	0,3592	0,0119
	P0	0,0778	0,1634	0,1478	0,4024	0,1222	0,3899
	P1	0,1332	0,2796	0,1260	0,3429	0,1072	0,3423
	P2	0,1139	0,2393	0,1074	0,1461	0,0941	0,1502
	P3	0,0975	0,1365	0,0915	0,0623	0,0826	0,0659
	P4	0,0834	0,0778	0,0780	0,0265	0,0725	0,0289
	P5	0,0714	0,0444	0,0664	0,0113	0,0637	0,0127

c) Para a distribuição dos empregados proposta na alínea b), determine a probabilidade de se encontrarem no sistema exactamente **2** clientes.

Nota: Se não resolveu a alínea b), admita que no sector A tem 3 empregados, no sector B tem 1 empregado e no sector C tem 1 empregado.

- 17 -

"Os Mimos da Tia Leonarda" é uma famosa loja de doçaria que tem cinco sectores com atendimento autónomo e especializado:

- A) "Bolachinhas da Minha Avó";
- B) "Chocolaterie";
- C) "Bolos daTia Leo";
- D) "Pudins da Zu";
- E) "Paraíso Conventual".

De acordo com os registos da Tia Leonarda, um cliente circula entre os vários sectores com as seguintes probabilidades:

De \ Para	A	B	C	D	E
A	-	0,20	0,30	0,10	0,03
B	0,10	-	0,20	0,05	0,04
C	0,20	0,10	-	0,30	0,12
D	0,05	0,10	0,35	-	0,10
E	0,01	0,05	0,10	0,07	-

Os processos de chegada dos clientes do exterior directamente a cada um dos sectores podem considerar-se Poissonianos com taxas médias indicadas no quadro seguinte. Nesse quadro indica-se também o tempo médio de atendimento em cada sector :

Sector	Taxa média de Chegadas, por hora	Tempo médio de Atendimento, em minutos
A	15	2,0
B	50	1,6
C	30	3,0
D	10	2,5
E	13	3,5

A Zumélia, secretária da Tia Leonarda, já tinha concluído que os tempos de atendimento em cada um dos sectores se poderia considerar exponencialmente distribuidos.

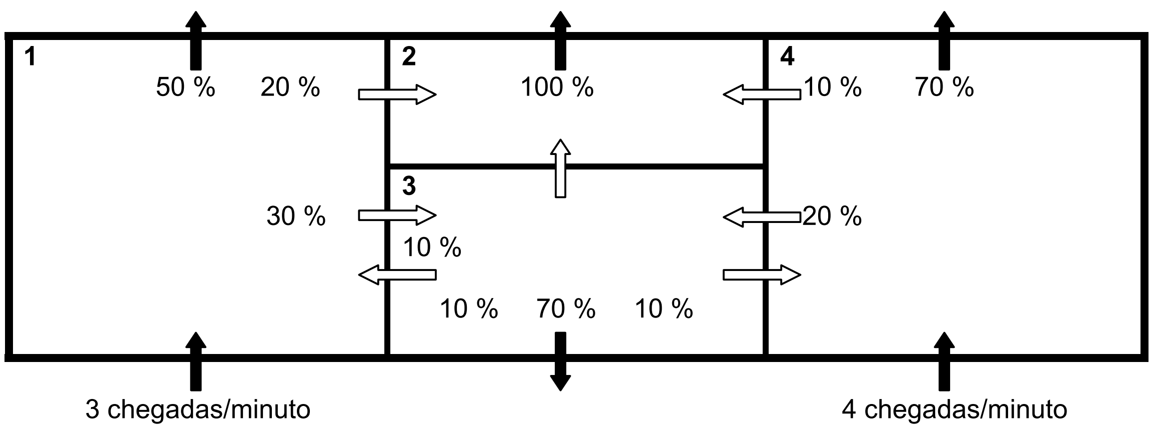
a) Determine as taxas médias efectivas de chegadas de clientes a cada um dos sectores.

b) Admita que estão ao serviço, em cada um dos sectores, o número mínimo de servidores. Determine o tempo médio de permanência no sistema de um cliente.

c) Admita que pode afectar um total de dois novos servidores a um (ou dois) sector(es). Onde colocaria os novos servidores? Qual o impacto que estes dois novos servidores teriam no tempo médio de permanência no sistema de um cliente?

- 18 -

Um determinado sistema de espera é constituído por quatro sectores *interdependentes*, de acordo com o esquema abaixo:



Resumidamente, os clientes só poderão entrar no sistema, pelos sectores 1, ou 4, de acordo com processos Poissonianos de taxa média, respectivamente, igual a 3 chegadas/minuto e 4 chegadas/minuto.

Depois de atendidos no sector 1, 20 % dos clientes seguirão para o sector 2, 30 % dos clientes seguirão para o sector 3 e 50 % deixarão o sistema.

Depois de atendidos no sector 2, todos os clientes deixarão o sistema.

Depois de atendidos no sector 3, 10 % dos clientes seguirão para o sector 1, 10 % dos clientes seguirão para o sector 2, 10 % dos clientes seguirão para o sector 4 e 70 % deixarão o sistema.

Depois de atendidos no sector 4, 10 % dos clientes seguirão para o sector 2, 20 % dos clientes seguirão para o sector 3 e 70 % deixarão o sistema.

Pode-se admitir que a duração do serviço em cada sector é distribuída exponencialmente. No sector 1, os clientes serão atendidos por dois servidores, com idêntica taxa de serviço – a duração média de cada serviço será de 30 segundos. No sector 2, os clientes serão atendidos por um servidor, sendo a duração média de cada serviço igual a 25 segundos. No sector 3, os clientes serão atendidos por um servidor, sendo a duração média de cada serviço igual a 15 segundos. No sector 4, os clientes serão atendidos por um servidor, sendo a duração média de cada serviço igual a 10 segundos.

Admita que, em cada sector, não há qualquer limitação quanto ao tamanho da fila de espera.

a) Determine as taxas de entrada nos diferentes sectores e caracterize esses processos de entrada.

b) Determine a probabilidade de o sistema se encontrar vazio.

c) Determine o número médio total de clientes no sistema **e** o tempo médio de permanência no sistema por cliente.

Formulário

Sistema M/M/1, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / \mu$ $(\rho < 1)$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho = P_0 = P(\mathcal{W}_q = 0)$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho = P(\mathcal{W}_q = 0)$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(\mathcal{W}_q > t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho\, e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

Sistema M/M/S, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa média de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S* servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ;n = 1,2,\ldots,S \\ S\mu & ;n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / (S\mu)$ $(\rho < 1)$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho$

$L = L_q + \lambda / \mu$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$W = W_q + 1/\mu = L/\lambda$

$W_q = L_q / \lambda$

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ;n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ;n \geq S+1, \end{cases}$$

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu.t} \left[1 + \frac{(S\rho)^S P_0 \left(1 - e^{-\mu.t(S-1-S\rho)}\right)}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(\mathcal{W}_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu.t(1-\rho)} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(\mathcal{W}_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

Sistema M/M/1/K, População = ∞ ; Fila máxima = K – 1

Número máximo de clientes no sistema = *K*

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0,1,\ldots,K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / \mu$

Taxa de **ocupação** $= \bar{\lambda}/\mu$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \bar{\lambda}/\mu = P_0 = P(\mathcal{W}_q = 0) = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \dfrac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$

$W = W_q + 1 / \mu$

$W = L / \bar{\lambda}$

$W_q = L_q / \bar{\lambda}$

$P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = P(\mathcal{W}_q = 0)$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ; \rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ 1/(K+1) & ; \rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ; n > K \end{cases}$$

Sistema M/M/S/K, População = ∞; Fila máxima = K – S

S **≤ K; Nº máximo de clientes no sistema = K; Nº de servidores =** ***S***

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0,1,\dots,K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\dots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / (S\mu)$)

Taxa de **ocupação** $= \bar{\lambda} / (S\mu)$ $\qquad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{S^S \rho^{S+1}(1-\rho^{K-S})}{S!(1-\rho)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[\dfrac{S^S}{S!}(K-S) + \displaystyle\sum_{n=0}^{S} \frac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1,\dots,S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S+1,\dots,K \\ 0 & ; n \geq K+1 \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{K-S} - (1-\rho)(K-S)\rho^{K-S} \right]$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1/\mu \quad ; \quad L = \bar{\lambda}\, W = L_q + \bar{\lambda}/\mu$$

Sistema M/M/*S*/*N*, População = *N* (Fila máxima = *N* – *S*)

S **≤ *N*; Nº máximo de clientes no sistema = *N*; Nº de servidores = *S***

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0,1,\ldots,N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \lambda\,(N - L)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S\mu)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,S!\,S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular **S = 1**:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} \text{ = taxa de desocupação}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{N!}{(N-n)!\,S!\,S^{n-S}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = S+1,\ldots,N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

continua

continuação Caso particular **S = 1**:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1,\ldots,N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

$$P(\mathcal{W}_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \sum_{n=0}^{N} (n-S)P_n$$

Caso particular **S = 1**:

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

$W_q = L_q / \bar{\lambda}$

$W = W_q + 1/\mu$; $L = \bar{\lambda}\, W = L_q + \bar{\lambda}/\mu$

♦ Prioridades "não absolutas":

$$W_k = \frac{1}{A.B_{k-1}.B_k} + \frac{1}{\mu}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N$$

Com $A = S!\left(\dfrac{S\mu-\lambda}{r^S}\right)\displaystyle\sum_{j=0}^{S-1}\frac{r^j}{j!} + S.\mu$,

$B_0 = 1$,

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{S\mu}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N,$$

e S = número de servidores,
μ = taxa média de serviço por cada servidor ocupado,
λ_i = taxa média de chegadas da classe de prioridade i, i = 1, 2, …, N

$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ e

$r = \lambda / \mu$

♦ **Prioridades "absolutas":**

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1}.B_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N.$$

$$L_k = \lambda_k \,.\, W_k\,, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots N.$$